Συνέχεια συνάρτησης

Μια συνάρτηση θα καλείται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν ισχύει: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *δηλαδή αν η τιμή της συνάρτησης στο x_0 βρίσκεται εκεί όπου τείνουν οι υπόλοιπες τιμές της.*

Από τον παραπάνω ορισμό συμπεραίνουμε:

- Η συνέχεια είναι σημειακή ιδιότητα *(σε αντίθεση π.χ. με τη μονοτονία που είναι ιδιότητα διαστήματος).*

- Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός διαστήματος τότε θα είναι συνεχής σε ολόκληρο το διάστημα.

- Ελέγχουμε για συνέχεια ΜΟΝΟ στα x_0 που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

  πχ Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της και λέγεται, απλά, συνεχής συνάρτηση.

- Για να είναι **α**συνεχής μία συνάρτηση <u>σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της</u>, θα πρέπει να συμβαίνει ένα από τα δύο:

  i. Ή να μην υπάρχει το όριο στο σημείο αυτό, δηλαδή $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

  ii. Ή να υπάρχει και να είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Όλες οι γνωστές μας συναρτήσεις:

i. πολυωνυμικές
ii. ρητές
iii. τριγωνομετρικές
iv. εκθετικές λογαριθμικές

καθώς και οι πράξεις συνεχών συναρτήσεων:

$$f(x) + g(x)\ ,\ \lambda f(x)\ ,\ f(x)g(x)\ ,\ \frac{f(x)}{g(x)}\ ,\ |f(x)|\ ,\ \sqrt[\nu]{f(x)}\ ,\ f\big(g(x)\big)$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Πρακτικά, λοιπόν, έλεγχο συνέχειας με χρήση του ορισμού θα κάνουμε σε πολύκλαδες συναρτήσεις, μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού όπου αλλάζει τύπο η συνάρτηση.

Να βρείτε τα $\alpha\,,\beta\in\mathbb{R}$ *, ώστε η συνάρτηση* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x^2+\beta x-3}{x-1} & , \quad x\neq 1\\ \quad 4 & , \quad x=1\end{cases}$

να είναι συνεχής.

Για οποιαδήποτε $\alpha\,,\beta\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι συνεχής για κάθε x≠1 , ως ρητή συνάρτηση (ή απλά πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων). Θέλουμε να βρούμε κατάλληλα $\alpha\,,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχής και για x=1.

Πρέπει: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha x^2+\beta x-3}{x-1}=4 \qquad (1)$

Θέτουμε: $g(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x-3}{x-1} \Rightarrow \alpha x^2+\beta x-3=g(x)(x-1)$, οπότε:

$$\lim_{x\to 1}\left(\alpha x^2+\beta x-3\right) = \lim_{x\to 1}\left[g(x)(x-1)\right] = \lim_{x\to 1} g(x)\cdot\lim_{x\to 1}(x-1)=4\cdot 0=0 \Rightarrow$$

$$\alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1-3=0 \Rightarrow \alpha+\beta-3=0 \Rightarrow \alpha+\beta=3 \qquad (2)$$

και με αντικατάσταση του (2) στο (1) παίρνουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\alpha x^2+\beta x-(\alpha+\beta)}{x-1}=4 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\alpha(x^2-1)+\beta(x-1)}{x-1}=4 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\alpha(x-1)(x+1)+\beta(x-1)}{x-1}=4 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left[\alpha(x+1)+\beta\right]}{x-1}=4 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\alpha(x+1)+\beta\right]=4 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=4 \qquad (3)$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (2) και (3) βρίσκουμε:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ 2\alpha+\beta=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=3-\alpha\\ 2\alpha+3-\alpha=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=3-1=2\\ \alpha=1\end{cases}$$

Το Θεώρημα Bolzano

Αν η συνάρτηση f(x) είναι:

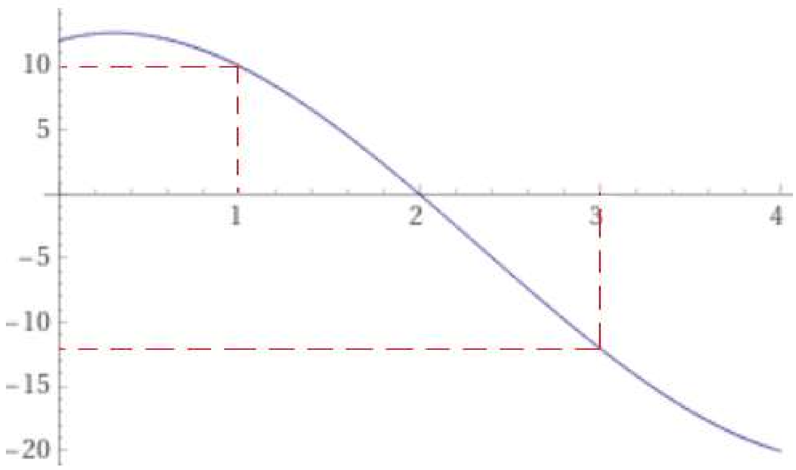
- συνεχής στο [α , β]
- και f(α)f(β)<0

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha\,,\beta)$: f(ξ)=0

Με άλλα λόγια, *αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα και ετερόσημη στα άκρα του, τότε σε κάποιο σημείο, εντός αυτού του διαστήματος, θα "περνάει" (τέμνει) τον άξονα x'x.*

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 7x^2 + 4x + 12$ είναι συνεχής, ως πολυωνυμική και $f(1) = 10 > 0$, $f(3) = -12 < 0$.

Άρα στο διάστημα [1,3] ισχύουν, για την f , οι συνθήκες του Θ. Bolzano, οπότε θα υπάρχει ξ∈ (1,3) : f(ξ)=0.



<u>Χαρακτηριστικά παραδείγματα μεθοδολογίας</u>:

1. Αν μας ζητάνε να δείξουμε ότι μία εξίσωση έχει ρίζα σε κάποιο διάστημα, θέτουμε κατάλληλη συνάρτηση και εφαρμόζουμε το Bolzano, πχ:

   Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{x^2+1}{x-\alpha} + \dfrac{x^6+1}{x-\beta} = 0 \quad , \alpha < \beta$ *έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα* (α, β).

Παρατηρούμε πως πρέπει να εφαρμόσουμε το Bolzano στο [α,β].

Αν, όμως, θέσουμε $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-\alpha}+\dfrac{x^6+1}{x-\beta}$, η συνάρτηση αυτή δεν ορίζεται για x=α και x=β.

Οπότε, πρώτα μετασχηματίζουμε τη δοσμένη εξίσωση:

$$\frac{x^2+1}{x-\alpha}+\frac{x^6+1}{x-\beta}=0 \;\Rightarrow\; (x-\beta)(x^2+1)+(x-\alpha)(x^6+1)=0$$

και έπειτα θέτουμε κατάλληλη συνάρτηση, στην οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε το Bolzano:

Θέτουμε $f(x)=(x-\beta)(x^2+1)+(x-\alpha)(x^6+1)$, συνεχής στο [α,β] ως πολυωνυμική, με $f(\alpha)=(\alpha-\beta)(x^2+1)<0$ και

$f(\beta)=(\beta-\alpha)(x^6+1)>0$

Οπότε, για την f , ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ. Bolzano στο [α,β] , άρα θα υπάρχει ξ∈ (α,β) : $f(\xi)=0 \;\Rightarrow$

$$(\xi-\beta)(\xi^2+1)+(\xi-\alpha)(\xi^6+1)=0 \;\Rightarrow\; \frac{\xi^2+1}{\xi-\alpha}+\frac{\xi^6+1}{\xi-\beta}=0$$

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (α,β).

2. Αν μας ζητάνε να δείξουμε ότι μία εξίσωση έχει ρίζα, δίχως όμως να μας υποδείξουν κάποιο διάστημα, τότε είτε προσπαθούμε να εντοπίσουμε κάποιο εύκολο διάστημα, στο οποίο η συνάρτηση που θα θέσουμε να είναι συνεχής και στα άκρα του ετερόσημη, είτε, αν δεν μπορούμε να βρούμε τέτοιο, προφανές, διάστημα, εργαζόμαστε με όρια στο $\pm\infty$, όπως φαίνεται παρακάτω:

   Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^{11}+\dfrac{25}{x^2+1}=139$ *έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.*

   Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^{11}+\dfrac{25}{x^2+1}-139$, η οποία είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^{11} + \dfrac{25}{x^2+1} - 139\right) = -\infty$, θα υπάρχει μ<0

έτσι ώστε: f(m)<0 .

Επειδή: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{11} + \dfrac{25}{x^2+1} - 139\right) = +\infty$, θα υπάρχει M>0

έτσι ώστε: f(M)>0 .

Άρα στο διάστημα [μ,Μ] ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ.Bolzano, οπότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈ (μ,Μ) : $f(\xi) = 0 \Rightarrow$

$$\xi^{11} + \frac{25}{\xi^2+1} - 139 = 0 \Leftrightarrow \xi^{11} + \frac{25}{\xi^2+1} = 139 \cdot$$

3. Αν μας ζητάνε να δείξουμε ότι μία εξίσωση έχει <u>μοναδική</u> ρίζα εντός κάποιου διαστήματος , τότε, πέρα από τις συνθήκες του Θ.Bolzano, θα πρέπει να δείξουμε, επιπλέον, πως η συνάρτηση που ορίσαμε είναι 1-1 εντός αυτού του διαστήματος (πχ βρίσκοντας τη μονοτονίας της).

   Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^7 + 3x^3 + x - 1 = 0$ *μηδενίζεται μόνο μια φορά στο* $(0,1)$.

   Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^7 + 3x^3 + x - 1$, η οποία είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική , με $f(0) = -1 < 0$ και $f(1) = 4 > 0$.

   Άρα στο διάστημα [0,1] ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ.Bolzano, οπότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈ (0,1) : $f(\xi) = 0 \Rightarrow$ $\xi^7 + 3\xi^3 + \xi - 1 = 0$. Επιπλέον, για κάθε $x_1 < x_2$ στο (0,1) είναι:

$$\left.\begin{array}{r} x_1^7 < x_2^7 \\ 3x_1^3 < 3x_2^3 \\ x_1 - 1 < x_2 - 1 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} x_1^7 + 3x_1^3 + x_1 - 1 < x_2^7 + 3x_2^3 + x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

   Άρα η f θα είναι 1-1 στο (0,1) ως γνησίως αύξουσα, επομένως η ρίζα ξ∈ (0,1) θα είναι μοναδική.

Άμεση συνέπεια του Θ. Bolzano είναι ότι αν μία συνεχής συνάρτηση **δεν μηδενίζεται σε** κάποιο **διάστημα**, τότε θα διατηρεί πρόσημο εντός αυτού.

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *, με* $\left(f(x)-x^2\right)\left(f(x)+x^2\right)=2x^2+1\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$ *,*
συνεχής συνάρτηση.

(i) *Να δείξετε ότι η f δεν μηδενίζεται.*

(ii) *Να βρεθεί ο τύπος της f , αν f(2000) = 4·10*^{6}*+1*

Λύση:

(i) Έστω ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$: $f(x_0)=0$.

Τότε η δοσμένη σχέση γίνεται: $\left(f(x_0)-x_0^2\right)\left(f(x_0)+x_0^2\right)=2x_0^2+1 \Rightarrow$

$-x_0^4=2x_0^2+1 \Rightarrow x_0^4+2x_0^2+1=0 \Rightarrow \left(x_0^2+1\right)^2=0 \Rightarrow x_0^2+1=0 \Rightarrow x_0^2=-1$
άτοπο αφού $x^2\geq 0 \quad , \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f δεν μηδενίζεται πουθενά στο $\mathbb{R}$.

(ii) Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει ότι:

$$\left(f(x)-x^2\right)\left(f(x)+x^2\right)=2x^2+1 \Rightarrow f^2(x)-x^4=2x^2+1 \Rightarrow$$

$$f^2(x)=x^4+2x^2+1 \Rightarrow f^2(x)=\left(x^2+1\right)^2 \Rightarrow$$

$$f(x)=x^2+1>0 \quad ή \quad f(x)=-(x^2+1)<0 \quad , \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Όμως η f θα έχει μόνο έναν από τους δύο τύπους για κάθε $x\in\mathbb{R}$ γιατί, αλλιώς, θα έπαιρνε δύο ετερόσημες τιμές και ως συνεχής συνάρτηση που ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$, θα έπρεπε, από το Θ.Bolzano, να είχε μία τουλάχιστον ρίζα αναμεσά τους, πράγμα άτοπο, όπως δείξαμε στο ερώτημα (i).

Επειδή γνωρίζουμε ότι f(2000) = 4·10^6+1 >0 , θα είναι, τελικά,
$f(x)=x^2+1>0 \quad , \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Αν η συνάρτηση f(x) είναι:

- συνεχής στο [α , β]
- και $f(α) \neq f(β)$

τότε, για κάθε αριθμό η εντός των f(α) και f(β) , υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$: f(ξ)=η

Συνέπεια του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών είναι ότι, αν f συνεχής σε διάστημα Δ και μη σταθερή εντός αυτού τότε το f(Δ) είναι διάστημα.

Το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

Αν η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής στο [α , β] τότε η f παίρνει στο [α , β] μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m.

Συνέπεια των δυο παραπάνω θεωρημάτων είναι ότι αν f συνεχής στο [α , β] (και μη σταθερή) τότε: $f([\alpha, \beta]) \equiv [m, M]$, όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.

Συνέχεια σε διάστημα και μονοτονία

Αν η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής στο [α , β] τότε:

- αν η f είναι γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της είναι το [f(α) , f(β)]
- αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, το σύνολο τιμών της είναι το [f(β) , f(α)]

Αν η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής στο (α , β) τότε:

- αν η f είναι γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\left(\lim_{x\to\alpha} f(x) \;,\; \lim_{x\to\beta} f(x)\right)$
- αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\left(\lim_{x\to\beta} f(x) \;,\; \lim_{x\to\alpha} f(x)\right)$